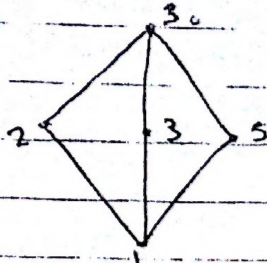


محاضرات الدفتر

القسم : تحليل رياضيات السنة : الرابعة + المادة : منطق رياضي المحاضرة : الحادي عشر

مثال : لنأخذ شبكة المثلثة بمخطط هاس هي شبكة كوزيمية وهذا هي شبكة مودولية.



الحل :

$$2 \wedge (3 \vee 5) = 2$$

$$(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \neq 2$$

غير متساوية وبالتالي الشبكة ليست كوزيمية

معامل $a=1$ فإن $a \leq z$ عندئذ

$$1 \vee (y \wedge z) = y \wedge z$$

$$(1 \vee y) \wedge z = y \wedge z$$

مساوية \Rightarrow

الشبكة مودولية.

معامل $a \neq 1$ عندئذ $a \leq z$ فإن $z = 3a$

$$a \vee (y \wedge z) = a \vee y$$

$$(a \vee y) \wedge z = a \vee y \Rightarrow$$

مساوية

وبتلك فإن الشبكة البانية المثلثة بمخطط هاس ومرتبة جزئياً

وفق علاقة القسمة هي شبكة مودولية.

سواء هو الشرط اللازم والكافي حقيقة الشبكة مودولية ؟ (جواب من خلال البرهان).

مبرهنة الهامة :

ان الشبكة (E, \leq, \vee, \wedge) هي شبكة مودولية اذا وفقط اذا حققت

عناهما الشرط التالي :

$$x \vee z = y \vee z \text{ و } x \wedge z = y \wedge z \text{ فإن } x = y$$

او x غير متقاربتين ،
الاثبات :

في نرم التوطر :

لنفرض ان الشبكة (E, \leq, \vee, \wedge) هي شبكة مودولية عندئذ اذا كان

فكان الشرط محققاً

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

وإذا كان x غير متقاربين فمطلوب

وإذا كان x متقاربين أي إذا $x \leq y$ عندها ثابت :

$$x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = x \vee (z \wedge y)$$

بما أن F هي شبكة معدولة فإن :

$$= (x \vee z) \wedge y$$

$$= (y \vee z) \wedge y = y$$

\Rightarrow كفاية العزم :

لتكن x, y, z عناصر اختيارية من الشبكة هي $x \leq z$ ولنفرض :

$$a = x \vee (y \wedge z) \quad , \quad b = (x \vee y) \wedge z$$

نلاحظ أن $a \leq b$ لأن

$$a = x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z = b$$

لأن

$$a \wedge y = [x \vee (y \wedge z)] \wedge y \geq [x \vee (y \wedge z)] \wedge (y \wedge z) = (y \wedge z)$$

$$b \wedge y = [(x \vee y) \wedge z] \wedge y = [(x \vee y) \wedge y] \wedge z = y \wedge z$$

$$\Rightarrow a \wedge y \geq b \wedge y \quad (P)$$

وبما أن $a \leq b$ فإن

$$a \wedge y \leq b \wedge y \quad (P)$$

ومن (P) والى الخاتمة :

$$a \wedge y = b \wedge y \quad (1)$$

وكذلك بنفس الطريقة فإن

$$a \vee y = [x \vee (y \wedge z)] \vee y = x \vee y$$

$$b \vee y = [(x \vee y) \wedge z] \vee y \leq [(x \vee y) \wedge z] \vee (x \vee y) = (x \vee y)$$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$$\Rightarrow b \vee y \leq a \vee y \quad (م)$$

وبعبارة أخرى : $a \leq b$ فإن :

$$b \vee y \geq a \vee y \quad (ب)$$

ومن (م) نلاحظ أن :

$$a \vee y = b \vee y \quad (2)$$

ومن (1) و (2) ومن المبرهن نجد أن $a = b$ ، والشبكة مودولية.

مسئولة هامة :

إن الشبكة (E, \leq, \wedge, \vee) هي شبكة توزيعية إذا وفقط إذا حققت

عناصري التوزيع التالي :

إذا كان :

$$x \vee z = y \vee z, \quad x \wedge z = y \wedge z \quad \text{فإن} \quad x = y$$

البرهان :

←

إذا كان $x \wedge z = y \wedge z, \quad x \vee z = y \vee z$ ، فإن الشبكة توزيعية ومنه :

ملاحظة

$$x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) =$$

بما أن الشبكة توزيعية فإن :

$$= (x \vee y) \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z) = y \vee (y \wedge z) = y$$

وهذا هو المطلوب.

⇒

إن الشبكة (E, \leq, \wedge, \vee) هي مبرهنة التوزيعية إذا وفقط إذا حققت

مودولية

ولنكن a, b, c ثلاثة عناصر اختيارية من الشبكة E ولنضع :

$$x = (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)] \quad (1)$$

$$y = (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c)] \quad (2)$$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

وبما ان $(a \wedge b) \leq (a \vee b)$ فيثبت:

$$x = [(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b) \dots (1)$$

وبما ان $(b \vee c) \leq (b \wedge c)$ فيثبت:

$$y = [(b \wedge c) \vee a] \wedge (b \vee c) \dots (2)$$

ومنه نجد $x = y$ (1)

$$x \wedge b = [(a \wedge b) \vee c] \wedge b =$$

$$= (a \wedge b) \vee (c \wedge b)$$

رابطاً حسب (1)

$$y \wedge b = [(b \wedge c) \vee a] \wedge b =$$

$$= (b \wedge c) \vee (a \wedge b)$$

ومن الملاحظ ان $x \wedge b = y \wedge b$ (1')

$$x \wedge b = y \wedge b \dots (1')$$

كما ان $y \wedge b = x \wedge b$ (2)

$$x \vee b = b \vee [(a \wedge b) \vee c] =$$

$$= (b \vee c) \wedge (a \vee b)$$

وكيف ان $x \vee b = y \vee b$ (2)

من شرط (2)

$$y \vee b = b \vee [(b \wedge c) \vee a] =$$

$$(b \vee a) \wedge (b \vee c)$$

ومن الملاحظ ان $x \vee b = y \vee b$ (2')

$$x \vee b = y \vee b \dots (2')$$

ومن (1) و (2) ومن الشرط يتبع ان $x = y$

ومنه يتبع ان

$$x \wedge a = y \wedge a$$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

وبجانبه (4) فاض :

$$x \wedge a = [(a \wedge b) \vee c] \wedge a = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

بما ان شبكة تودورية

رمز (44) جداول :

$$y \wedge a = a \wedge [a \vee (b \wedge c)] \wedge (b \wedge c) = a \wedge (b \wedge c)$$

مع طابعية الامتصاص

ومن هنا : $x \wedge a = y \wedge a$ وبما ان :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

وبما ان الشبكة تودورية

نفس الشبكة طابعة

في هذم النوع من الشبكة بكل دائم يجب ان تحتوي على عنصرين هامين هما العنصر
الاكبر يرمز له بالرمز (1) والعنصر الاصغر والذي يرمز له بـ (0)

- تعريف :

لنكن $(E, \vee, \wedge, 1, 0)$ شبكة ما تحتوي على العنصرين 1 و 0 ولنكن x عنصر
عام في E عندئذ نقول ان العنصر x مضاعف E اذا حقق

الشروط التالية :

$$x \vee x' = 1, \quad x \wedge x' = 0$$

مثال 1 - $(\rho(E), \vee, \wedge, 1, 0)$

في هذه الشبكة يوجد عنصران :

العنصر الاصغر $0 = \phi$

العنصر الاكبر $1 = E$

$$A \in \rho(E)$$

ان متمم العنصر A هو

$$B = E \setminus A$$

مثال 2 -

لنأخذ الشبكة المصنعة بمخطط هاريس التالي :

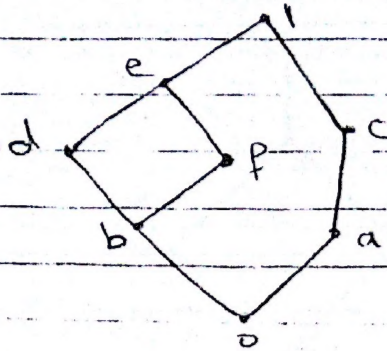
محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :



حالة يتم منتم العنصر d و e .

المتم

العنصر

الحل

a, c

d

e, d, f, b

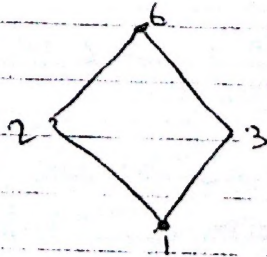
a

ملاحظة :

إن كل شبكة تحتوي العنصر (1) (0) فإن منتم العنصر (0) هو (1) ومنتم العنصر (1) هو (0) وإذا كان x' منتم للعنصر x فإن x هو منتم للعنصر x'

تعريف شبكة مقمات :
نسمي الشبكة $(E, \leq, 1, 0)$ شبكة مقمات (شبكة مقمة) إذا تحتوي على العنصرين (1) و (0) وكان لكل عنصر x من E منتم واحد على الأقل

مثال 1 : $(P(E), \leq, 1, 0)$ هي شبكة مقمات ولكل عنصر منتم واحد فقط .
مثال 2 : إن الشبكة $O(6)$ هي شبكة مقمات ولكل عنصر منتم واحد فقط .
مثال 3 : هي شبكة مقمات ولكل عنصر منتم واحد فقط .



0 = 1

عنصر الأصغر

1 = 6

عنصر الأكبر

مثال 3 : هي شبكة مقمات ولكل عنصر منتم واحد فقط .

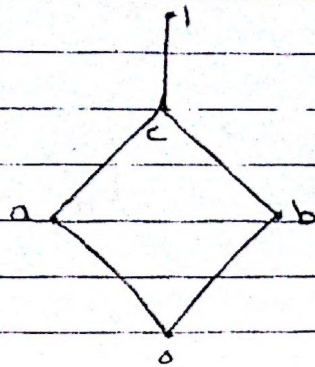
محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

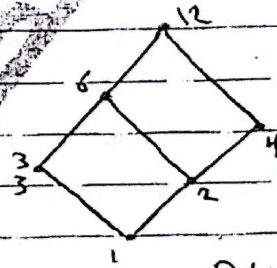
القسم :



ليست شبكة ممتدة
لأنها لا تحتوي على
الأقل من 3 رؤس
لعموم.

مثال 4 - ارسم مخطط هاملتون للشبكات المطابقة جزئياً لعلاقة التماثل :

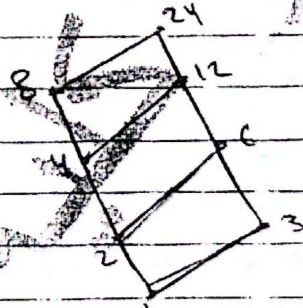
$D(12)$, $D(24)$



$D(12)$

إذا كانت الشبكة توافعية
وربما تكون غير ممتدة ولكن
هذه الممتدة وربما

أعجب ممتد العناصر 2 و 6 في $D(12)$ ؟ لا يوجد لأن ممتدات شبكات هاملتون



$D(24)$

شبكة ليست شبكة ممتدة
ولكن هي شبكة توافعية

مثال 5 - ارسم مخطط هاملتون للشبكة $D(30)$ بالاعتماد على علاقة التماثل و $D(6)$ شبكة ممتدة

الحل : نلاحظ أن $m \neq 0$ و $n \neq 0$ و $\gcd(m, n) = 1$ و $\text{P.C.M}(m, n) = m \cdot n$

أي أن m و n هما العدد (1) أي $a = 1$

والعنصر الأكبر 30 أي $\phi = 30$

وإذا كان m ممتد n فإن

$$n \wedge m = \gcd(m, n) = 1$$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$$n \cdot m = l.c.m(m, n) = 30$$

مثال ١

$$m \cdot n = 30$$

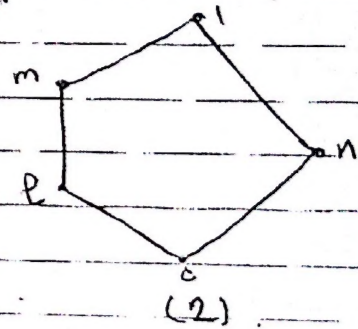
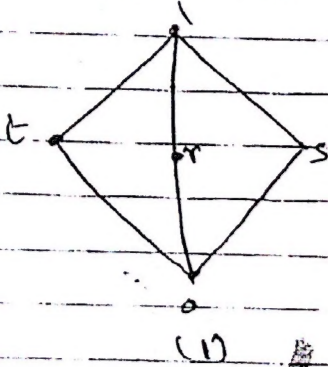
$$m' = \frac{30}{n}, \quad 1' = \frac{30}{1} = 30, \quad 2' = \frac{30}{2} = 15$$

$$3' = \frac{30}{3} = 10, \quad 5' = \frac{30}{5} = 6, \quad 6' = \frac{30}{6} = 5$$

$$15' = 2, \quad 30' = 1$$

مثال ٢

هذا مثال على المصفوفة المتماثلة ذات الحدين $A = (a_{ij})$ حيث $a_{ij} = a_{ji}$ و $a_{ii} = 0$ لكل i .



المصفوفة (1) هي مصفوفة متماثلة ذات حدين $A = (a_{ij})$ حيث $a_{ij} = a_{ji}$ و $a_{ii} = 0$ لكل i .
 المصفوفة (2) هي مصفوفة متماثلة ذات حدين $B = (b_{ij})$ حيث $b_{ij} = b_{ji}$ و $b_{ii} = 0$ لكل i .
 ولأن A و B مصفوفتان متماثلتان ذات حدين، فإن $A + B$ هي مصفوفة متماثلة ذات حدين.

انتهت المحاضرة